

Esempio di esercizio di esame.

Determinare le soluzioni della seguente disequazione:

$$\frac{|2x - 1| - 2}{x - 5} \geq 0$$

Per risolvere questo esercizio occorre saper svolgere le seguenti operazioni:

- 1) Risolvere disequazioni polinomiali di 1° grado.
- 2) Unire e intersecare soluzioni di disequazioni.
- 3) Studiare il segno di rapporti tra polinomi.
- 4) Risolvere disequazioni con valore assoluto.

Risolvere equazioni e disequazioni con polinomi di grado 2 o ≥ 3 oppure con altre funzioni elementari.

1) Disequazioni di 1° grado

ESEMPI

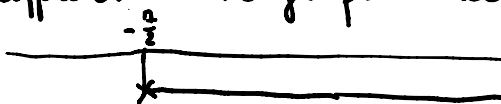
$$1) \quad 2x + 7 > 0$$

$$2x > -7$$

$$x > -\frac{7}{2}$$

(Si può dividere per 2 perché $2 > 0$).

Rappresentazione grafica delle soluzioni:



$$2) \quad 1 - 3x > 0$$

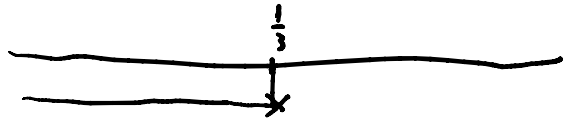
$$-3x > -1$$

$$x < \frac{-1}{-3}$$

$$x < \frac{1}{3}$$

Ricordare: quando si divide per un numero negativo bisogna invertire il verso della disequazione.

Rappresentazione grafica:



$$3) -5x + 7 \leq 0$$

$$-5x \leq -7$$

$$x \geq \frac{-7}{-5}$$

$$x \geq \frac{7}{5}$$

oppure:

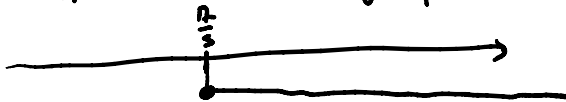
$$-5x + 7 \leq 0$$

$$7 \leq 5x$$

$$\frac{7}{5} \leq x$$

$$x \geq \frac{7}{5}$$

Rappresentazione grafica delle soluzioni:



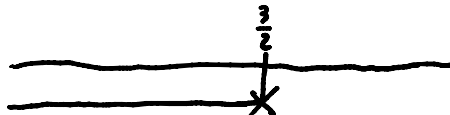
$$\bullet x(x+1) < x(2x-1) - x^2 + 3$$

$$x^2 + x < 2x^2 - x - x^2 + 3$$

$$\underline{x^2} + x \quad \underline{-2x^2} + x \quad \underline{+x^2} < 3$$

$$2x < 3$$

$$x < \frac{3}{2}$$



2) Unione e intersezione di soluzioni di disequazioni

Unione

ESEMPIO:

$$2x - 1 > 0$$

✓

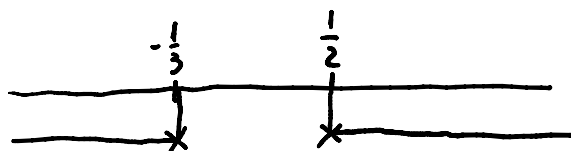
$$3x + 1 < 0$$

$$2x > 1$$

$$x > \frac{1}{2}$$

$$3x < -1$$

$$x < -\frac{1}{3}$$



$$x > \frac{1}{2} \quad \vee \quad x < -\frac{1}{3}$$

• ESEMPIO

$$x < 2 \quad \vee \quad 2x + 1 \leq 0$$

$$2x \leq -1$$

$$x \leq -\frac{1}{2}$$

$$x < 2 \quad \vee \quad x \leq -\frac{1}{2}$$



$$x < 2$$

• ESEMPIO

$$x > 3 \quad \vee \quad x < 5$$



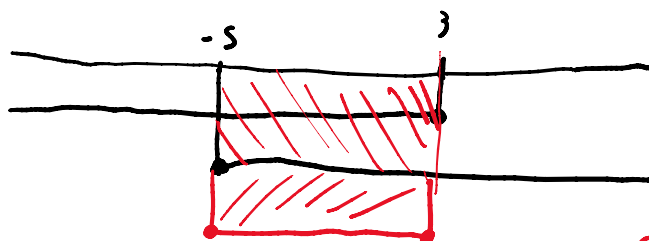
In questo caso
l'unione delle soluzioni
comprende ogni $x \in \mathbb{R}$.

Intersezione di soluzioni:

Significa risolvere un sistema tra due disequazioni:

$$\begin{cases} x - 3 \leq 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases}$$

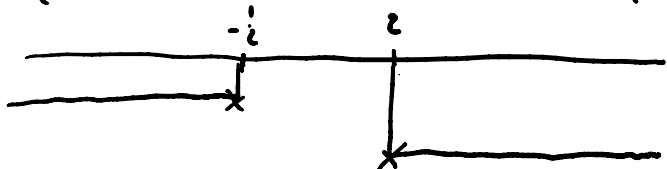
$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -5 \end{cases}$$



intersezione delle soluzioni:

Soluzione del sistema: $-5 \leq x \leq 3$

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x + 1 < 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x > 2 \end{cases}$$


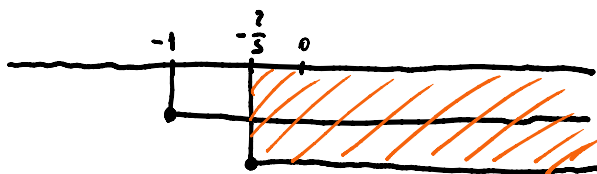
Il sistema non ha soluzione.

ESEMPIO

$$\begin{cases} 5x + 2 > 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x \geq -2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x \geq -1 \end{cases}$$

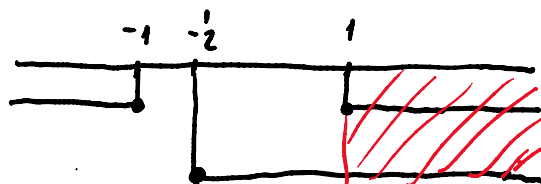


Soluzioni del sistema: $x \geq -\frac{2}{5}$

Possono capitare situazioni in cui bisogna sia fare un'unione che un'intersezione:

$$\begin{cases} x \geq 1 \vee x \leq -1 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \vee x \leq -1 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$



Soluzioni del sistema: $x \geq 1$

3) Rapporti di polinomi (di 1° grado).

ESEMPIO 1

$$\frac{2x+1}{x-3} \geq 0$$

Si risolve studiando il segno di numeratore e denominatore.

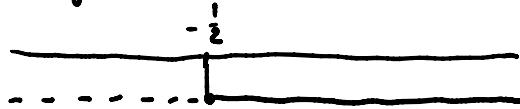
Numeratore:

$$2x+1 \geq 0$$

$$2x \geq -1$$

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

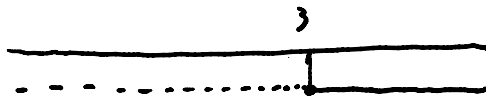
Segno del numeratore:



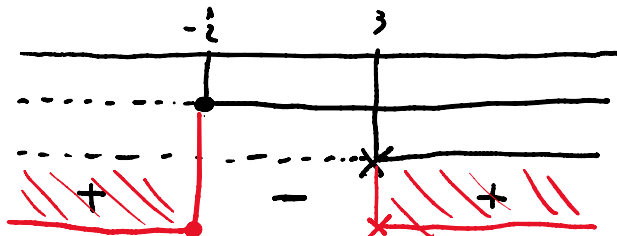
Denominatore

$$x-3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$



Segno della frazione:



$$x \leq -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x > 3.$$

• ESEMPIO 2

$$\frac{5-x}{2-x} < 0$$

Segno del numeratore:

$$5-x \geq 0$$

$$-x \geq -5$$

$$x \leq 5$$

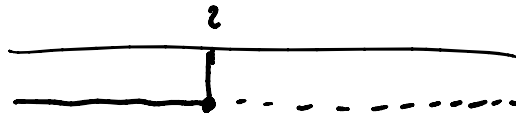


Segno del denominatore:

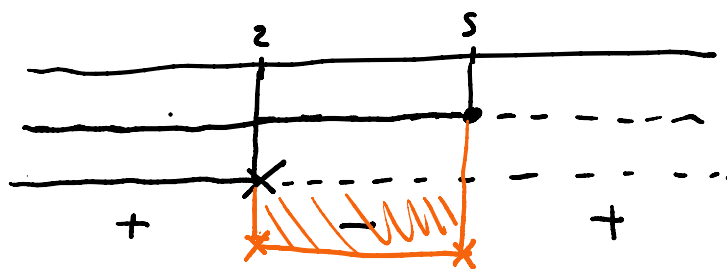
$$2 - x \geq 0$$

$$-x \geq -2$$

$$x \leq 2$$



Segno della frazione:



$$2 < x < 5$$

Lo stesso procedimento si può usare per i prodotti anche di più polinomi.

$$(2x+1)(x-2)(4x-3) > 0$$

Segno di $2x+1$:

$$2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

Segno di $x-2$:

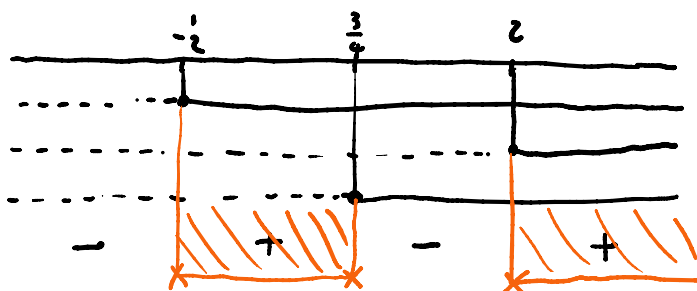
$$x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Segno di $4x-3$:

$$4x-3 \geq 0$$

$$x \geq \frac{3}{4}$$

Segno del prodotto:



$$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4} \quad \vee \quad x > 2$$

• ESEMPIO 3

$$\frac{2x-1}{x+3} \leq 1$$

$$\frac{2x-1}{x+3} - 1 \leq 0$$

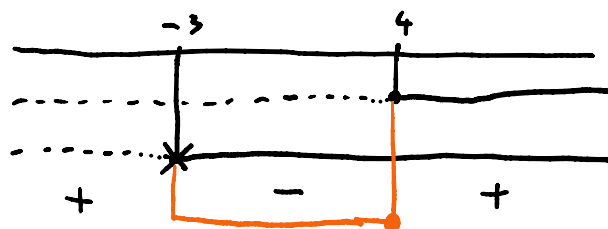
$$\frac{2x-1 - 1 \cdot (x+3)}{x+3} \leq 0$$

$$\frac{2x-1 - x - 3}{x+3} \leq 0$$

$$\frac{x-4}{x+3} \leq 0$$

Numatore $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

Denom: $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$



$$-3 < x \leq 4$$

4) Diseguazioni con valore assoluto

Ricordare

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \quad \vee \quad f(x) \leq -g(x)$$

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$$

ESEMPIO 1

$$|2x - 3| \geq 1.$$

$$2x - 3 \geq 1 \quad \vee \quad 2x - 3 \leq -1$$

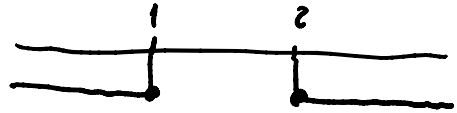
$$2x \geq 4$$

$$x \geq 2$$

$$2x \leq 2$$

$$x \leq 1$$

$$\text{Soluzioni: } x \geq 2 \quad \vee \quad x \leq 1$$



ESEMPIO 2

$$|5x - 3| \geq x$$

$$5x - 3 \geq x \quad \vee \quad 5x - 3 \leq -x$$

$$4x \geq 3$$

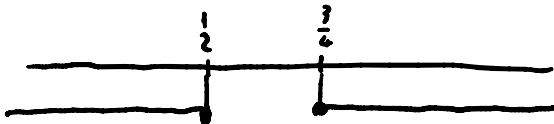
$$x \geq \frac{3}{4}$$

$$6x \leq 3$$

$$x \leq \frac{3}{6}$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Soluzioni: } x \geq \frac{3}{4} \quad \vee \quad x \leq \frac{1}{2}$$



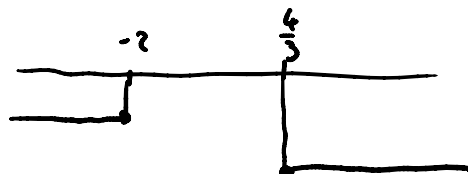
ESEMPIO 3

$$|2x - 1| \leq x - 3$$

$$\begin{cases} 2x - 1 \leq x - 3 \\ 2x - 1 \geq -(x - 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ 2x - 1 \geq -x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$



non ci sono soluzioni.

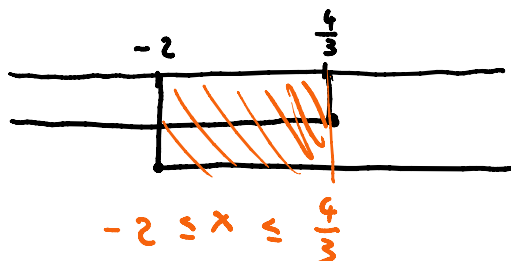
ESEMPIO 4

$$|3x + 1| \leq 5$$

$$\begin{cases} 3x + 1 \leq 5 \\ 3x + 1 \geq -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \leq 4 \\ 3x \geq -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{4}{3} \\ x \geq -2 \end{cases}$$



ESEMPIO 5

$$x |2x + 1| \leq 1$$

Non è in una delle due forme che abbiamo visto prima.

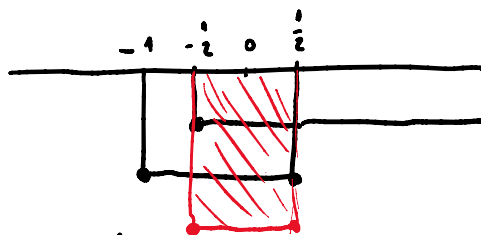
$$\textcircled{I} \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x(2x + 1) \leq 1 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} 2x + 1 < 0 \\ -x(2x + 1) \leq 1 \end{cases} \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x^2 + x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Soluzioni di \textcircled{I} : $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$\textcircled{II} \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ -2x^2 - x \leq 1 \end{cases}$$

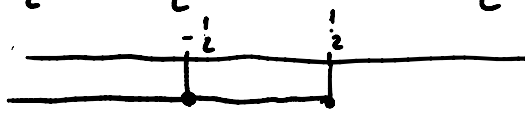
$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ 2x^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$\Delta = 1 - 8 < 0$

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

Soluzioni della disequazione: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ $\vee x < -\frac{1}{2}$

$x \leq \frac{1}{2}$



Esercizi di esame:

$$\frac{|2x-1| - 2}{x-5} \geq 0$$

Studio il segno di numeratore e denominatore.

Numeratore:

$$|2x-1| - 2 \geq 0$$

$$|2x-1| \geq 2$$

$$2x-1 \geq 2 \quad \vee \quad 2x-1 \leq -2$$

$$2x \geq 3$$

$$2x \leq -1$$

$$x \geq \frac{3}{2}$$

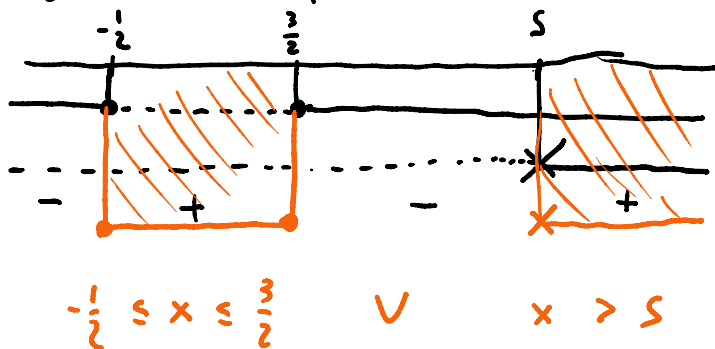
$$x \leq -\frac{1}{2}$$

$$x \geq \frac{3}{2} \quad \vee \quad x \leq -\frac{1}{2}$$

Denominatore:

$$x-5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 5.$$

Segno della frazione:



ESERCIZIO:

$$\frac{|2x-1| - x}{x-3} \geq 0$$

Numeratore:

$$|2x-1| - x \geq 0$$

$$|2x-1| \geq x$$

$$2x-1 \geq x$$

$$x \geq 1$$

$$\vee \quad 2x-1 \leq -x$$

$$\vee \quad 3x \leq 1$$

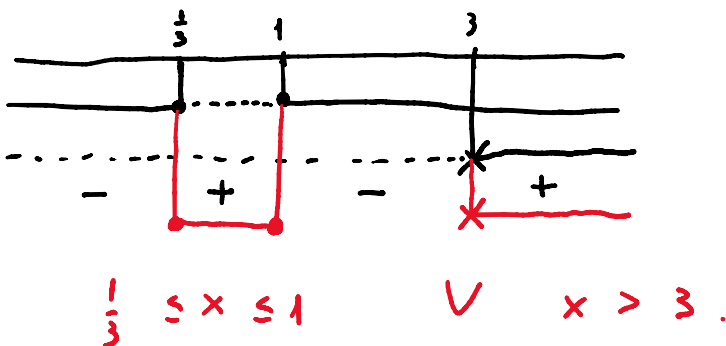
$$x \leq \frac{1}{3}$$

$$x \geq 1 \quad \vee \quad x \leq \frac{1}{3}$$

Denom:

$$x-3 \geq 0 \iff x \geq 3$$

Segno della frazione:



ESERCIZIO

$$\frac{3 - |2x+1|}{x-2} \geq 0.$$

$$x \leq -2 \quad \vee \quad 1 \leq x < 2$$

$$3 - |2x+1| \geq 0$$

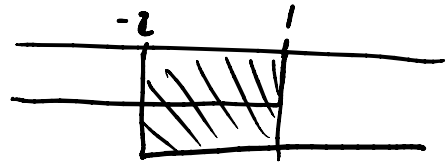
$$-|2x+1| \geq -3$$

$$|2x+1| \leq 3$$

$$\begin{cases} 2x+1 \leq 3 \\ 2x+1 \geq -3 \end{cases}$$

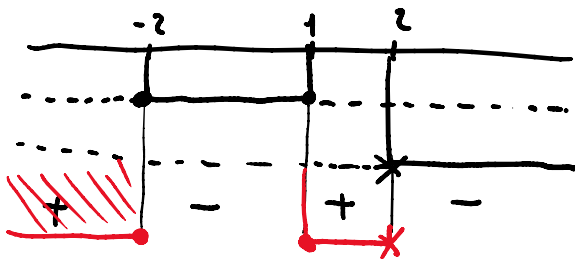
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \leq 2 \\ 2x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$-2 \leq x \leq 1$$



Denom: $x - 2 \geq 0$
 $x \geq 2$

Segno della frazione:



$$x \leq -2 \quad \vee \quad 1 < x < 2$$

$$\frac{|3x-1| - 2}{x-3} \geq 0$$

Soluzione
 $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \quad \vee \quad x > 3$

Svolgimento:

Numeratore:

$$|3x-1| - 2 \geq 0$$

$$|3x-1| \geq 2$$

$$3x-1 \geq 2 \quad \vee \quad 3x-1 \leq -2$$

$$3x \geq 3 \quad \vee \quad 3x \leq -1$$

$$x \geq 1 \quad \vee \quad x \leq -\frac{1}{3}$$

Metodo alternativo

$$\textcircled{\text{I}} \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ 3x-1-2 \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 3x-1 < 0 \\ -3x+1-2 \geq 0 \end{cases} \quad \textcircled{\text{II}}$$

$$\textcircled{\text{I}} \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 3x \geq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$x \geq 1$$

$$\textcircled{\text{II}} \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ 3x \leq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

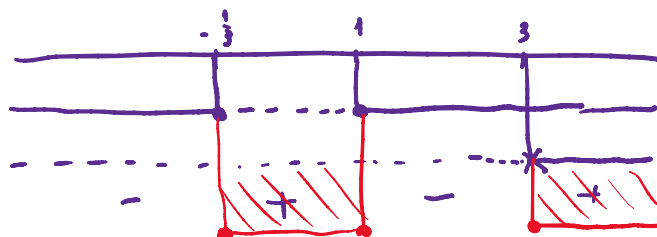
$$x \leq -\frac{1}{3}$$

Numeratore: $x \leq -\frac{1}{3} \quad \vee \quad x \geq 1$



Denominatore: $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

Segno della frazione:



Soluzioni:

$$-\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \quad \vee \quad x > 3$$

$$\bullet \quad \frac{1 - |2x - 3|}{x - 9} \leq 0$$

Soluzione:

$$1 \leq x \leq 2 \quad \vee \quad x > 9$$

Sviluppiamento:

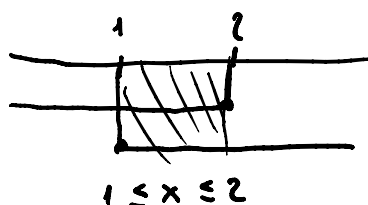
Numeratore: $1 - |2x - 3| \geq 0$

$$\Leftrightarrow |2x - 3| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \leq 1 \\ 2x - 3 \geq -1 \end{cases}$$

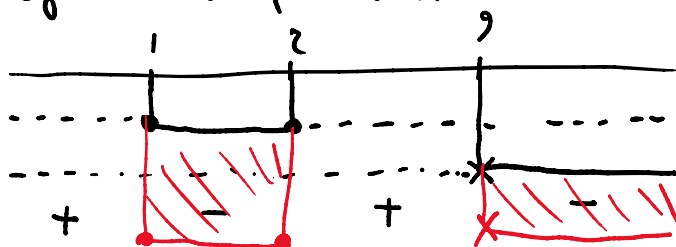
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 4 \\ 2x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



Denominatore: $x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 9$

Segno della frazione:



Soluzioni:

$$1 \leq x \leq 2 \quad \vee \quad x > 9$$

Esercizio

$$\frac{|x-2|}{x-3} \geq 2$$

Svolgimento:

$$\frac{|x-2|}{x-3} \geq 2 \iff \frac{|x-2| - 2(x-3)}{x-3} \geq 0$$

$$\iff \frac{|x-2| - 2x + 6}{x-3} \geq 0$$

Numeratore:

$$|x-2| - 2x + 6 \geq 0$$

$$\iff |x-2| \geq 2x-6$$

$$\iff x-2 \geq 2x-6 \quad \vee \quad x-2 \leq -2x+6$$

$$\iff x \leq 4 \quad \vee \quad 3x \leq 8$$

$$\iff x \leq 4 \quad \vee \quad x \leq \frac{8}{3}$$

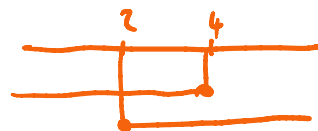


Metodo alternativo per il numeratore:

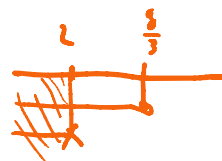
$$|x-2| - 2x + 6 \geq 0$$

$$\textcircled{I} \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-2-2x+6 \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-2 < 0 \\ -x+2-2x+6 \geq 0 \end{cases} \quad \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \begin{cases} x \geq 2 \\ -x+4 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 4 \end{cases}$$
$$2 \leq x \leq 4$$



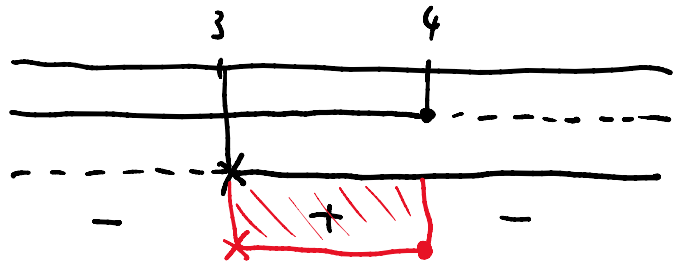
$$\textcircled{II} \begin{cases} x < 2 \\ -3x+8 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 2 \\ 3x \leq \frac{8}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x < 2 \\ x \leq \frac{8}{3} \end{cases}$$



$$|x-2| - 2x + 6 \geq 0 \iff x < 2 \vee 2 \leq x \leq 4 \iff x \leq 4$$

Denominatore: $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Segno della frazione:



Soluzioni:

$$3 < x \leq 4.$$